

CALCULS DE DLs

Exercice 1 - Somme et produit de DLs - L1/Math Sup - *

1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4) \\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \\ \cos(2x) &= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x , et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x) \cos(2x) = x - \frac{13x^3}{6} + \frac{121x^5}{120} + o(x^6).$$

4. On écrit les développements limités

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\end{aligned}$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Exercices - Développement limités : corrigé

5. C'est la même méthode, encore plus facile car $1 + x^3 = 1 + x^3 + o(x^3)$. Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15x^3}{16}.$$

6. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

on trouve

$$(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).$$

Exercice 2 - Composition de DLs - L1/Math Sup - ★

1. On commence par écrire

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

On peut donc écrire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

En particulier, on remarque que $o(u^2) = o(x^4)$. De plus, on sait que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

On calcule les puissances de u , et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{-x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2 \times 36}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Mais,

$$\begin{aligned}u &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\u^3 &= x^3 + o(x^4) \\u^4 &= x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp(\sin x \ln(\cos x)).$$

On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}u &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\u^3 &= o(x^5) \\u^4 &= o(x^5) \\u^5 &= o(x^5)\end{aligned}$$

Il vient

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sin(x) \ln(\cos x) &= \left(x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) \\&= -\frac{x^3}{2} + o(x^5)\end{aligned}$$

Finalement, on pose $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$, et on voit que $v^2 = o(x^5)$. On obtient donc

$$\exp(\sin x \ln(\cos x)) = \exp(v) = 1 + v + O(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre !

Exercices - Développements limités : corrigé

4. On commence par étudier le DL de $\frac{1}{x} \ln(\cosh hx)$. Au voisinage de 0, le DL à l'ordre 4 du cosinus hyperbolique est donné par

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Celui de $\ln(1+u)$ est donné par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a déjà $o(u^2) = o(x^4)$. Puisque $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, on a en introduisant dans le DL de $\ln(1+u)$:

$$\frac{1}{x} \ln(\cosh x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

(on se contente de DLs à l'ordre 3 car on va les multiplier par x à la fin). Pour trouver le DL de $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$, on doit encore composer par l'exponentielle :

$$\exp(v) = v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$$

avec

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\ v^2 &= \frac{x^2}{4} + o(x^3) \\ v^3 &= \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

On trouve donc

$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Pour la fonction initiale, ceci donne

$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

Exercice 3 - Inverse de DL - L1/Math Sup - ★

1. On pose $u = x + x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on utilise

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$

On calcule les puissances de u , mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :

$$\begin{aligned} u &= x + x^2 \\ u^2 &= x^2 + 2x^3 + x^4 \\ u^3 &= x^3 + 3x^4 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

2. On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement !) de $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. Pour cela, on remarque que

$$g(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = \frac{1}{1-u}$$

avec

$$\begin{aligned}u &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^4)\end{aligned}$$

On déduit du DL de $\frac{1}{1-u}$ que

$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

et on trouve

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

3. A l'ordre 2, on a

$$\cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

On multiplie ce DL par celui de $\sin x - 1$

$$\sin x - 1 = -1 + x + o(x^2).$$

On trouve finalement

$$\frac{\sin x - 1}{2 + \cos x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

4. Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en x vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Exercice 4 - DLs pas en 0! - L1/Math Sup - ★

1. On pose $x = 2 + h$, d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{2+h} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$

En revenant à x , on a

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

2. On pose $u = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u} \\ &= 1 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} + o(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

3. On commence par écrire

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x = \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right).$$

On pose alors $u = \frac{1}{x}$, puis on écrit, pour se ramener à un DL du logarithme en 0,

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2} = \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + o(u^4)$$

d'où, par composition de DLS,

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+u^2}\right) = \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{32} + o(u^4).$$

Revenant à la fonction initiale, on trouve

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln x = \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Exercices - Développements limités : corrigé

Exercice 5 - Ordre le plus grand possible - L1/Math Sup - **

On écrit :

$$\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$$

ce qui donne, par produit

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + (b^2-ab)x^4 + (-b^3+ab^2)x^6 + o(x^6).$$

Finalement, le développement limité de la fonction est donné par

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-b^2+ab+\frac{1}{24}\right)x^4 + \left(+b^3-ab^2-\frac{1}{120}\right)x^6.$$

Le terme d'ordre 2 disparaît si $b-a=1/2$, et celui d'ordre 4 disparaît aussi si

$$-b(b-a) = -\frac{1}{24} \iff b = 1/12.$$

Dans ce cas, on trouve $a = -5/12$ et pour ces valeurs de a et b , on trouve une partie principale de degré 6 :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \frac{1}{480}x^6.$$

Exercice 6 - Astucieux! - L1/Math Sup - **

On écrit $e^x = \sum_{k=1}^{100} \frac{x^k}{k!} + o(x^{100})$, de sorte que

$$\begin{aligned} \ln\left(\sum_{k=1}^{99} \frac{x^k}{k!}\right) &= \ln\left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right) \\ &= x - \ln\left(1 - e^{-x}\left(\frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right)\right) \\ &= x - e^{-x}\frac{x^{100}}{100!} + o(e^{-x}x^{100}). \end{aligned}$$

Mais $e^{-x} = 1 + o(1)$, et donc

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{99} \frac{x^k}{k!}\right) = x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100}).$$

Exercice 7 - Développement limité d'une fonction réciproque - L1/Math Sup - **

1. f est clairement de classe C^∞ et sa dérivée qui vérifie $f'(x) = 1 + 2 \tan^2 x$ est strictement positive sur $] -\pi/2, \pi/2[$. Puisque $\lim_{-\pi/2} f = -\infty$ et $\lim_{\pi/2} f = +\infty$, f réalise une bijection de $] -\pi/2, \pi/2[$ sur \mathbb{R} . Comme f' ne s'annule pas, f^{-1} est également de classe C^∞ .

Exercices - Développements limités : corrigé

2. La fonction réciproque d'une fonction impaire est elle-même impaire. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Alors on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(-y) &= f^{-1}(-f(x)) \\ &= f^{-1}(f(-x)) \\ &= -x \\ &= -f^{-1}(f(x)) \\ &= -f^{-1}(y). \end{aligned}$$

3. Puisque f^{-1} est de classe C^∞ et est impaire, elle admet un développement limité à l'ordre 6 en 0 qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6).$$

D'autre part, on sait que

$$f(x) = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6).$$

Le développement limité de $f^{-1} \circ f$ en 0 s'obtient en composant les développements limités. On obtient donc

$$f^{-1} \circ f(x) = a_1x + \left(a_3 + \frac{2a_1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3\right)x^5 + o(x^6).$$

D'autre part, on sait que

$$f^{-1} \circ f(x) = x = x + o(x^6).$$

Par unicité du développement limité en 0, on en déduit le système

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_3 + \frac{2a_1}{3} = 0 \\ a_5 + \frac{4a_1}{15} + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

soit $a_1 = 1$, $a_3 = -2/3$, $a_5 = 16/15$. Le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0 est donc donné par

$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 8 - Développement limité d'une fonction réciproque - L1/Math Sup/Oral Mines - **

On remarque d'abord que $f(x) = x + x^3/2 + o(x^3)$. Ainsi, f est continue en 0 avec $f(0) = 0$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$. Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} . Ensuite, on vérifie (par exemple en la dérivant) que f est strictement croissante. De plus, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Ainsi, f est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Elle admet donc une fonction réciproque $g = f^{-1}$ définie sur \mathbb{R} . Puisque $f'(0) \neq 0$ et que f est C^∞ au voisinage de 0, g est indéfiniment dérivable en 0.

Ainsi, g admet un DL à tout ordre en 0. De $f(0) = 0$, on tire $g(0) = 0$ et donc le DL à l'ordre

Exercices - Développements limités : corrigé

3 de g en 0 s'écrit $g(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$. Pour calculer a, b, c , écrivons quel est le développement limité à l'ordre 3 de $f \circ g$. On a

$$f \circ g(x) = (ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)) + (ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3))^3/2 + o(g(x)^3) = x$$

soit

$$ax + bx^2 + (a^3/2 + c)x^3 + o(x^3) = x.$$

Par unicité du développement limité, on extrait

$$a = 1, b = 0, a^3/2 + c = 0$$

soit $g(x) = x - x^3/2 + o(x^3)$.

APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Exercice 9 - Limites de fonctions - L1/Math Sup - ★

1. Rappelons les développements limités à l'ordre 3 de sin et tan :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - x^3/6 + o(x^3) \\ \tan(x) &= x + x^3/3 + o(x^3)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\exp(\sin x) = \exp(x - x^3/6 + o(x^3)) = \exp(x) \exp(-x^3/6 + o(x^3)) = \exp(x) \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

où on a utilisé le DL de $\exp(u) = 1 + u + o(u)$ et où on a composé les développements limités. Avec la même méthode, on trouve

$$\exp(\tan x) = \exp(x) \left(1 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right).$$

Il vient :

$$\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x} = \exp(x) \frac{-x^3/6 - x^3/3 + o(x^3)}{-x^3/6 - x^3/3 + o(x^3)} = \exp(x) \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow 1$$

lorsque x tend vers 0.

2. On écrit

$$x^{x^x} \ln x = \exp(x \ln(x^x)) \ln x = \exp(x^2 \ln x) \ln x.$$

Puisque $x^2 \ln x$ tend vers 0 en O^+ , on en déduit que $\exp(x^2 \ln x)$ tend vers 1 et donc que

$$x^{x^x} \sim_{0^+} \ln x.$$

D'autre part,

$$x^x - 1 = \exp(x \ln x) - 1 = 1 + x \ln x + o(x \ln x) - 1 = x \ln x + o(x \ln x),$$

Exercices - Développements limités : corrigé

la composition des développements limités étant légitime puisque $x \ln x$ tend vers 0 en 0^+ .
On en déduit que

$$\frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1} \sim_{0^+} \frac{\ln x}{x \ln x} = \frac{1}{x}$$

et donc que la fonction tend vers $+\infty$ en 0^+ .

3. On passe au logarithme :

$$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{1}{2} (e^{x \ln a} + e^{x \ln b}) \right) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{2} (\ln a + \ln b) \right) \sim_0 \frac{1}{x} \frac{x}{2} \ln(ab).$$

Repassant par l'exponentielle, on trouve que la limite recherchée est

$$\exp \left(\frac{1}{2} \ln(ab) \right) = \sqrt{ab}.$$

4. Il suffit d'écrire

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x).$$

La limite recherchée est donc égale à 1.

Exercice 10 - Étude locale d'une courbe - L1/Math Sup - *

1. Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

2. Au point d'abscisse 0, on a $f(0) = 1/2$, f est dérivable et vérifie $f'(0) = -1/4$. Le graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

3. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \right) = \frac{1}{48}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Si x est assez petit, cette quantité est positive pour $x > 0$, et négative pour $x < 0$: la courbe traverse sa tangente.

Exercice 11 - Position relative d'une courbe et de sa tangente - L1/Math Sup - *

On va effectuer un DL jusqu'à l'ordre 3 de f . Pour cela, on écrit

$$f(x) = \ln 2 + \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$$

et posons $u = x + \frac{x^2}{2}$. On a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, et

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{x^2}{2} \\ u^2 &= x^2 + x^3 + o(x^3) \\ u^3 &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

La courbe représentative de f admet donc au point $(0, \ln 2)$ une tangente d'équation $y = \ln 2 + x$. De plus,

$$f(x) - (\ln 2 + x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Cette différence est donc positive au voisinage de 0^- , et négative au voisinage de 0^+ . La courbe traverse donc sa tangente en $(0, \ln 2)$.

Exercice 12 - Branches infinies - L1/Math Sup - ★★

On commence par l'étude au voisinage de $+\infty$. On met x^2 en facteur sous les racines pour se ramener à effectuer un développement limité en 0 :

$$\sqrt{x^2 + 1} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x\left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right).$$

De même,

$$\sqrt{x^2 - 1} = x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)\right).$$

On en déduit :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x).$$

La courbe d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut pousser le développement limité un peu plus loin...jusqu'à obtenir le premier terme non nul !

$$\sqrt{x^2 + 1} = x\left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon(1/x)\right),$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = x\left(1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon(1/x)\right),$$

ce qui donne :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x).$$

Au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(1/x)$ est négatif : la courbe est sous l'asymptote. L'étude au voisinage de $-\infty$ peut se faire en remarquant que la fonction étudiée est paire. On en déduit alors que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$, et que la courbe est située au-dessous de son asymptote.

Exercice 13 - Asymptotes - L1/Math Sup - ★★

1. Remplaçons les cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par leur développement en fonction de l'exponentielle. On obtient

$$f(x) = \frac{xe^x - e^x + xe^{-x} + e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 2}.$$

On met en facteur e^x , d'où

$$f(x) = \frac{x - 1 + xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}.$$

Ce qui nous intéresse, ce sont les termes en x et les termes constants. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{x - 1 + o(1)}{1 + o(1)}.$$

Il vient

$$f(x) = x - 1 + o(1).$$

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Si on cherche en plus la position par rapport à l'asymptote, on doit pousser un cran plus loin. On trouve

$$f(x) = \frac{x - 1 + o(e^{-x})}{1 - 2e^{-x} + o(e^{-x})} = (x - 1 + o(e^{-x}))(1 + 2e^{-x} + o(e^{-x})) = (x - 1) + 2xe^{-x} + o(e^{-x}).$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

2. Posons $u = 1/x$. Pour $x \rightarrow +\infty$, u est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3}) \right) \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y = x - 1/2$ est asymptote à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$ et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

3. On pose encore $u = 1/x$, et on obtient

$$h(x) = \frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + e^u} = \frac{1 + 1/u}{2 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}.$$

On calcule alors le développement limité avec les techniques usuelles et on trouve que

$$h(x) = \frac{1}{2u} + \frac{1}{4} - \frac{u}{4} + o(u) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de h , et la courbe est sous son asymptote (au voisinage de l'infini).

4. On effectue un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que :

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) &= x \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x + 2$ est donc asymptote à la courbe représentative de u au voisinage de $+\infty$, et la courbe est située au-dessus de son asymptote.

Exercice 14 - Comparaison de fonction - L1/Math Sup - *

On fait un développement limité en 0 à un ordre suffisamment grand pour qu'on puisse distinguer les fonctions. Le point le plus difficile est pour $h(x)$. Mais

$$1 - 2 \sin x = 1 - 2x + o(x^2)$$

de sorte que

$$h(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x).$$

Pour les autres, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x + x^2 + o(x^2) \\ g(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ k(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \end{aligned}$$

En comparant donc les termes d'ordre 2, on trouve $h \leq k \leq g \leq f$. Les courbes représentatives sont bien sûr dans le même ordre.

Exercice 15 - Dérivée n-ième en 0 - L1/Math Sup - *

Remarquons que la fonction est de classe C^∞ . Par la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre n en 0, et le coefficient devant x^n est $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. D'autre part, on a :

$$\frac{x^4}{1 + x^6} = x^4 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{6k} + o(x^{6n+4}).$$

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, si $n \equiv 4 \pmod{6}$, alors $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{(n-4)/6}$, sinon, $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 16 - Limite un peu théorique - L1/Math Sup - *

Puisque f est deux fois dérivable en x , elle admet un développement limité d'ordre 2 en x donné par la formule de Taylor-Young. On trouve donc

$$\begin{aligned} f(x - h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2) \\ -2f(x) &= -2f(x) \\ f(x + h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2) \end{aligned}$$

Exercices - Développements limités : corrigé

En sommant tout et en divisant par h^2 , on trouve finalement

$$\frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(x) + o(1).$$

La limite recherchée vaut donc $f''(x)$.

Exercice 17 - Somme des premiers entiers - L1/Math Sup - ★★

1. On commence par écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2}{2}x^2 + \frac{(n+1)^3}{6}x^3 + \frac{(n+1)^4}{24}x^4 + o(x^4)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= \frac{(n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}x + \frac{(n+1)^3}{6}x^2 + \frac{(n+1)^4}{24}x^3 + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}. \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$ et utilisant le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$, on trouve

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3).$$

Il reste à réaliser le produit des deux développements limités. Après simplifications et factorisations, on trouve

$$f(x) = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3).$$

2. On va écrire f d'une autre façon en remarquant que f est somme d'une série géométrique. On a en effet

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \exp(kx).$$

On peut alors calculer le développement limité de f en utilisant cette formule, et on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \left(1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^n k \right) x + \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) \frac{x^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on peut identifier les termes devant x^3 . On trouve

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Cette méthode permet de calculer n'importe quelle somme $\sum_{k=1}^n k^p$ (à condition d'être assez courageux pour déterminer le développement limité jusqu'à l'ordre p).

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SUITES IMPLICITES

Exercice 18 - Tangente - L1/Math Sup - **

1. La fonction $x \mapsto \tan x - x$ est une bijection strictement croissante de l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . En effet, sa dérivée est égale à $1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$, qui est strictement positive sauf pour $x = n\pi$. On en déduit que l'équation $\tan x = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Il faut prendre garde au fait que \arctan est la réciproque de $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, on doit écrire

$$\tan(x_n) = x_n \iff \tan(x_n - n\pi) = x_n$$

et là, puisque x_n est élément de $] - \pi/2, \pi/2[$, ceci est équivalent à

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$

3. Puisque (x_n) est croissante et que la fonction \arctan l'est aussi, la suite $(x_n - n\pi)$ est croissante. Puisqu'elle est majorée par $\pi/2$, elle est convergente, vers l . Passant à la limite dans l'équation $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$, on trouve $l = \pi/2$. On peut donc bien écrire $x_n = n\pi + \pi/2 + o(1)$.
4. On commence par rappeler le développement limité de \arctan en 0. Il s'obtient par intégration du développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$. On a donc

$$\arctan(x) = x + o(x^2).$$

On va avoir besoin du développement limité de \arctan au voisinage de $+\infty$. Il s'obtient facilement à partir du développement limité précédent et de la relation $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, vraie pour $x > 0$. On obtient donc, au voisinage de $+\infty$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Utilisons maintenant la relation démontrée en 2. En posant $x_n = n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n$, on obtient

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n}\right).$$

On utilise le développement limité préalablement calculé (à l'ordre 1) :

$$\varepsilon_n = \frac{-1}{n\pi + \pi/2 + \varepsilon_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1/n^2)$$

soit, en développant le terme de droite

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{-1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{\pi n}} + o(1/n^2) \\ &= \frac{-1}{n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{2n} + o(1/n)\right) + o(1/n^2) \\ &= \frac{-1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o(1/n^2). \end{aligned}$$

Ceci donne le développement limité souhaité pour la suite (x_n) .

Exercice 19 - Sinus hyperbolique - L1/Math Sup/Petites Mines - **

1. Soit, pour $x \geq 0$, la fonction $g(x) = \tanh(x) - x$. Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée

$$g'(x) = 1 - \tanh^2 x - 1 = -\tanh^2 x < 0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

2. Un calcul direct prouve que

$$f'(x) = \left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) \cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme \cosh est strictement positive, on trouve d'après la question précédente que f' est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Calculons ses limites en 0 et en $+\infty$.

- en 0 : on pose $u = 1/x$, et on a

$$x \sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}.$$

Or, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ par croissances comparées, et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$. Finalement, on trouve que $\lim_0 f = +\infty$.

- en $+\infty$: on pose encore $u = 1/x$, de sorte que

$$x \sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} \sim_0 \frac{u}{u} = 1.$$

Ainsi, $\lim_{+\infty} f = 1$.

3. C'est du cours, en utilisant le DL à l'ordre 3 de $\sinh u$:

$$\frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2).$$

4. On pose $u = 1/x$ et on utilise le résultat de la question précédente. Donc, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = \frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

5. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] \lim_{+\infty} f, \lim_0 f [=]1, +\infty[$. Comme $(n+1)/n \in]1, +\infty[$, on a bien l'existence d'un unique u_n avec $f(u_n) = \frac{n}{n+1}$.

6. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f . Comme f , elle est strictement décroissante. De plus, elle vérifie $\lim_1 f^{-1} = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f^{-1} = 0$. On applique f^{-1} à l'inégalité

$$\frac{n+1}{n} \geq \frac{n+2}{n+1}$$

et on trouve que

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

7. On utilise encore que $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Puisque $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ et que f^{-1} admet une limite en 1, on en déduit par composition des limites que

$$\lim_{+\infty} u_n = \lim_1 f^{-1} = +\infty.$$

8. Puisque $u_n \rightarrow +\infty$, il est légitime d'introduire u_n dans l'expression du développement asymptotique de f trouvé un peu plus haut. On a donc :

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right).$$

On remplace $f(u_n)$ par $1 + 1/n$ et on obtient

$$\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$

soit $\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}$, donc $\frac{6u_n^2}{n} \rightarrow 1$, soit encore, en prenant la racine carrée,

$$\frac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 1.$$

Finalement, on a prouvé que

$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{6}}.$$

Exercice 20 - Suite implicite - exponentielle - L1/Math Sup - ★★★

1. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + x$ est dérivable, et sa dérivée vérifie $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Puisque $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . En particulier, il existe un unique élément $u_n \in \mathbb{R}$ pour lequel $f(u_n) = n$.
2. Puisque f est strictement croissante et que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f^{-1} est aussi strictement croissante et vérifie également $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Puisque $u_n = f^{-1}(n)$, on en déduit par passage à la limite que $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$.
3. Le point clé est de remarquer que, puisque u_n tend vers $+\infty$, on a $u_n = o(e^{u_n})$. De l'équation $e^{u_n} + u_n = n$, on en déduit

$$e^{u_n} + o(e^{u_n}) = e^{u_n}(1 + o(1)) = n.$$

On prend alors le logarithme de cette expression, et on trouve

$$u_n \ln(1 + o(1)) = \ln n$$

soit

$$u_n + o(u_n) = \ln n$$

ce qui dit bien que $u_n \sim \ln n$.

4. On pose donc $v_n = u_n - \ln n$ et on écrit que

$$e^{\ln n + v_n} + \ln n + v_n = n.$$

En isolant e^{v_n} dans l'expression précédente, on obtient

$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{v_n}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Il suffit de prendre le logarithme de cette expression et d'utiliser le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-x)$ pour trouver que

$$v_n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Ceci donne bien le développement asymptotique demandé pour u_n .

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à devgeolabo@gmail.com Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

<http://www.bibmath.net/forums>